# Fórmulas para la cola M/M/1

- $\lambda_k = \lambda, \mu_k = \mu, \forall k.$
- La condición de estabilidad (la ergodicidad) es que $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$.

| PROCESO | DISTRIBUCIÓN DE LA VARIABLE | PARÁMETROS DE RENDIMIENTO |
|---|---|---|
| $N$ = número de clientes en el sistema. | $N \hookrightarrow Geom(\rho),\ \rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$,<br>$P(N = k) = (1-\rho)\rho^k$. | $L = E(N) = \dfrac{\rho}{1-\rho}$. |
| $N_q$ = número de clientes en la cola.<br>$N_q \in \{0, 1, 2, \cdots\}$. | $P(N_q = k) = \begin{cases} p_0 + p_1, & k = 0 \\ p_k, & k > 0 \end{cases}$. | $L_q = E(N_q) = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$.<br>$L_q = L - (1 - p_0)$. |
| $N_q^{'}$ = tamaño de la cola si no está vacía.<br>$N_q^{'} \in \{1, 2, 3, \cdots\}$. | $P(N_q^{'} = k) = \dfrac{p_{k+1}}{\rho^2}$. | $L_q^{'} = E(N_q^{'}) = \dfrac{1}{1-\rho}$. |
| $T_q$ = tiempo en la cola. | $W_q(t) = \begin{cases} 1-\rho, & t = 0 \\ 1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t}, & t > 0 \end{cases}$.<br>($W_q(t)$ es la fc. de distribución.)<br><br>$w_q(t) = \rho(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t}$.<br>($w_q(t)$ es la fc. de densidad.) | $W_q = E(T_q) = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$. |
| $T$ = tiempo en el sistema. | $T \hookrightarrow exp(\mu - \lambda)$.<br>$W(t) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}$. | $W = E(T) = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$. |

# Relaciones entre los parámetros de rendimiento

| PARÁMETROS | VALIDEZ DE LA RELACIÓN |
|---|---|
| $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ | Se da siempre. |
| $L = \lambda W, \quad L_q = \lambda W_q$ | Se da en sistemas ergódicos. |
| $L = L_q + 1 - p_0$ | Se da en sistemas con un único servidor y servicio de uno en uno. |
| $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$ | Se da en sistemas ergódicos. |
| $p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$ | Se da en sistemas con un único servidor y servicio de uno en uno. |
| $W_q = \frac{L}{\mu}$ | Se da solo en sistemas de colas $M/M/1$ y similares. |

# Fórmulas para la cola M/M/S

- $s$ es el número de servidores.
- $\lambda_k = \lambda, \forall k$, y $\mu_k = \begin{cases} k\mu, & k \cdot\ s \\ s\mu, & k \geq s \end{cases}$. La condición de estabilidad es $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu} < 1$.

| PROCESO | DISTRIBUCIÓN DE LA VARIABLE | PARÁMETROS DE RENDIMIENTO |
|---|---|---|
| $N =$ número de clientes en el sistema. | $p_n = \begin{cases} p_0 \dfrac{\phi^n}{n!}, & n \cdot\ s-1, \quad \phi = \dfrac{\lambda}{\mu} \\ p_0 \rho^n \dfrac{s^s}{s!}, & n \geq s, \quad \rho = \dfrac{\lambda}{s\mu} \end{cases}.$ <br> $p_0 = \square \displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\phi^n}{n!} + \frac{\phi^s}{s!(1-\rho)} \Big]^{-1}.$ | $L = E(N) = \lambda W = \phi + \dfrac{\phi^{s+1}}{s \cdot s!(1-\rho)^2} p_0.$ |
| $N_q =$ número de clientes en la cola. <br> $N_q \in \{0, 1, 2, \cdots\}$. | $P(N_q = 0) = P(N \cdot\ s) = \displaystyle\sum_{n=0}^{s} p_0 \frac{\phi^n}{n!}.$ <br> $P(N_q = n) = P(N = n+s) = p_0 \rho^n \dfrac{s^s}{s!}, \quad n > 0.$ | $L_q = E(N_q) = \dfrac{\phi^{s+1}}{s \cdot s!(1-\rho)^2} p_0.$ |
| $T_q =$ tiempo en la cola. | No se ve la distribución. | $W_q = E(T_q) = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{\phi^{s+1}}{\lambda s \cdot s!(1-\rho)^2} p_0.$ |
| $T =$ tiempo en el sistema. | No se ve la distribución. | $W = E(T) = W_q + \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{\phi^{s+1}}{\lambda s \cdot s!(1-\rho)^2} p_0 + \dfrac{1}{\mu}.$ |

# Fórmulas para la cola M/M/S/K

- $s$ es el número de servidores y $K$ es el número total de clientes que pueden estar en el sistema.
- $\lambda_n = \begin{cases} \gamma, & 0 \cdot \; n < K \\ 0, & n \geq K \end{cases}$ y $\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \cdot \; n < s \\ s\mu, & s \cdot \; n \cdot \; K \end{cases}$ . Como es un sistema finito, siempre es estable.
- La tasa global de llegadas es $\lambda = \gamma P(N < K) + 0P(N = K) = \gamma(1 - p_K)$.

| PROCESO | DISTRIBUCIÓN DE LA VARIABLE | PARÁMETROS DE RENDIMIENTO |
|---|---|---|
| $N =$ número de clientes en el sistema.<br><br>$N \in \{0, 1, \cdots, K\}$ | $p_n = \begin{cases} p_0 \dfrac{\phi^n}{n!}, & 0 \cdot \; n \cdot \; s-1, \quad \phi = \dfrac{\gamma}{\mu} \\ p_0 \rho^n \dfrac{s^s}{s!}, & s \cdot \; n \cdot \; K, \quad \rho = \dfrac{\gamma}{s\mu} \end{cases}.$<br><br>$p_0 = \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^{s-1} \dfrac{\phi^n}{n!} + \dfrac{s^s}{s!} \rho^s \dfrac{1-\rho^{K-s+1}}{1-\rho}\right]^{-1}, & \text{si } \rho \neq 1 \\ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \dfrac{\phi^n}{n!} + \dfrac{s^s}{s!}(K-s+1)\right]^{-1}, & \text{si } \rho = 1 \end{cases}.$ | $L = E(N) = L_q + s - \sum_{n=0}^{s-1} (s-n) p_n.$<br><br>$(\rho \neq 1.)$ |
| $N_q =$ número de clientes en la cola.<br><br>$N_q \in \{0, 1, \cdots, K-s\}$ | $P(N_q = 0) = P(N \cdot \; s) = p_0 \sum_{n=0}^{s} \dfrac{\phi^n}{n!},$<br><br>$P(N_q = k) = P(N = s+k) = p_{k+s},$<br>$k = 1, 2, \cdots, K-s.$ | $L_q = E(N_q) =$<br>$p_0 \dfrac{\phi^s}{s!} \dfrac{\rho}{(1-\rho)^2} \left[1 - \rho^{K-s+1} - (1-\rho)(K-s+1)\rho^{K-s}\right].$<br>$(\rho \neq 1.)$ |
| $T_q =$ tiempo en la cola. | No se ve la distribución. | $W_q = E(T_q) = W - \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{L}{\gamma(1-p_K)} - \dfrac{1}{\mu}, \quad (\rho \neq 1).$ |
| $T =$ tiempo en el sistema. | No se ve la distribución. | $W = E(T) = \dfrac{L}{\gamma(1-p_K)}.$ |

# Fórmulas para la cola M/M/S/S

- $s = K$ es el número de servidores. En este sistema no existe cola y, por tanto, $T_q \equiv 0$ y $N_q \equiv 0$.
- $\lambda_n = \begin{cases} \gamma, & 0 \cdot\ n < s \\ 0, & n \geq s \end{cases}$ y $\mu_n = n\mu, \quad 0 \cdot\ n \cdot\ s$. Como es un sistema finito, siempre es estable.
- La tasa global de llegadas es $\lambda = \gamma P(N < s) + 0P(N = s) = \gamma(1 - p_s)$.
- La probabilidad de perder clientes es $p_s$.
- Los resultados para esta cola son válidos también para la cola $M/G/S/S$, donde $G$ es una distribución general de servicio independiente de la de llegada.

| PROCESO | DISTRIBUCIÓN DE LA VARIABLE | PARÁMETROS DE RENDIMIENTO |
|---|---|---|
| $N =$ número de clientes en el sistema. | $p_n = \dfrac{\frac{\phi^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{s} \frac{\phi^n}{n!}}, \quad \phi = \dfrac{\gamma}{\mu}.$ | $L = E(N) = s - \sum_{n=0}^{s-1}(s-n)p_n.$ |
| $N \in \{0, 1, \cdots, s\}$ | Primera fórmula de Erlang. | $(\rho \neq 1)$ |
| $T =$ tiempo en el sistema. | No se ve la distribución. | $W = E(T) = \dfrac{L}{\gamma(1 - p_K)}.$ |

# Fórmulas para la cola M/M/$\infty$

- Colas con servicio ilimitado, esto es, con infinitos servidores. No hay espera en la cola y, por tanto, $T_q \equiv 0$ y $N_q \equiv 0$. .
- $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = n\mu, \forall n$. El sistema siempre es estable.

| PROCESO | DISTRIBUCIÓN DE LA VARIABLE | PARÁMETROS DE RENDIMIENTO |
|---|---|---|
| $N =$ tiempo en el sistema.<br>$N \hookrightarrow P(\rho)$ | $p_n = e^{-\rho}\dfrac{\rho^n}{n!}, \quad \rho = \dfrac{\lambda}{\mu}.$ | $L = E(N) = \dfrac{\lambda}{\mu} = \rho.$ |
| $T =$ tiempo en el sistema. | No se ve la distribución. | $W = E(T) = \dfrac{L}{\lambda} = \dfrac{1}{\mu}.$ |

# Fórmulas para la cola M/M/S/K/N

- $s$ es el número de servidores, $K$ el número total de clientes que pueden estar en el sistema y $N$ el tamaño de la población de clientes que llegan al sistema. (No confundir esta $N$ con la variable aleatoria $N$, número de clientes en el sistema.)
- $\lambda_n = \begin{cases} (N-n)\gamma, & 0 \cdot \ n < N \\ 0, & n \geq N \end{cases}$ y $\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \cdot \ n < s \\ s\mu, & n \geq s \end{cases}$. Como es un sistema finito, siempre es estable.
- La tasa global de llegadas es $\lambda = \sum_{n=0}^{N}(N-n)\gamma p_n = \sum_{n=0}^{N} N\gamma p_n - \sum_{n=0}^{N} n\gamma p_n = \gamma N - \gamma L = \gamma(N-L)$.

| PROCESO | DISTRIBUCIÓN DE LA VARIABLE | PARÁMETROS DE RENDIMIENTO |
|---|---|---|
| $N$ = número de clientes en el sistema (v.a.).<br>$N \in \{0, 1, \cdots, K\}$ | $p_n = \begin{cases} p_0 \phi^n \binom{N}{n}, & 0 \cdot \ n \cdot \ s-1, \quad \phi = \dfrac{\gamma}{\mu} \\ p_0 \binom{N}{n} \dfrac{n!s^s}{s!}\rho^n, & s \cdot \ n \cdot \ N, \quad \rho = \dfrac{\gamma}{s\mu} \end{cases}$.<br>$p_0 = \square \sum_{n=0}^{s-1} \phi^n \binom{N}{n} + \sum_{n=s}^{N} \binom{N}{n} \dfrac{n!s^s}{s!}\rho^n \Big]^{-1}$. | $L = E(N) = \sum_{n=0}^{N} np_n =$<br>$p_0 \ \square \sum_{n=0}^{s-1} n\phi^n \binom{N}{n} + \sum_{n=s}^{N} n\binom{N}{n} \dfrac{n!s^s}{s!}\rho^n \Big]$ |
| $N_q$ = número de clientes en la cola.<br>$N_q \in \{0, 1, \cdots, K-s\}$ | $P(N_q = 0) = P(N \cdot \ s) = p_0 \sum_{n=0}^{s} \phi^n \binom{N}{n}$,<br>$P(N_q = k) = P(N = s+k) = p_{k+s}$,<br>$k = 1, 2, \cdots, K-s$. | $L_q = E(N_q) = L - s + p_0 \sum_{n=0}^{s-1} (s-n)\phi^n \binom{N}{n}$. |
| $T_q$ = tiempo en la cola. | No se ve la distribución. | $W_q = E(T_q) = \dfrac{L_q}{\gamma(N-L)}$. |
| $T$ = tiempo en el sistema. | No se ve la distribución. | $W = E(T) = \dfrac{L}{\gamma(N-L)}$. |

# Fórmulas para la cola M/M/∞/∞/N

- $N$ el tamaño de la población de clientes que llegan al sistema. (No confundir esta $N$ con la variable aleatoria $N$, número de clientes en el sistema.)
- $\lambda_n = \begin{cases} (N-n)\gamma, & 0 \cdot \;\; n < N \\ 0, & n \geq N \end{cases}$ y $\mu_n = n\mu, n = 0, 1, 2, \cdots$. Como es un sistema finito, siempre es estable.
- La tasa global de llegadas es $\lambda = \sum_{n=0}^{N}(N-n)\gamma p_n = \sum_{n=0}^{N} N\gamma p_n - \sum_{n=0}^{N} n\gamma p_n = \gamma N - \gamma L = \gamma(N-L)$.

| PROCESO | DISTRIBUCIÓN DE LA VARIABLE | PARÁMETROS DE RENDIMIENTO |
|---|---|---|
| $N =$ número de clientes en el sistema (v.a.).<br>$N \in \{0, 1, \cdots, K\}$ | $p_n = p_0 \phi^n \binom{N}{n}, \quad \phi = \dfrac{\gamma}{\mu}$.<br>$p_0 = \dfrac{1}{(1+\phi)^N}$. | $L = E(N) = \dfrac{N\phi}{1+\phi}$. |
| $N_q =$ número de clientes en la cola $\equiv 0$. | | $L_q = E(N_q) = 0$. |
| $T_q =$ tiempo en la cola $\equiv 0$. | | $W_q = E(T_q) = 0$. |
| $T =$ tiempo en el sistema. | No se ve la distribución. | $W = E(T) = \dfrac{L}{\lambda} = \dfrac{1}{\mu}$. |

# Fórmulas para colas con impaciencia M/M/1

- $\lambda_n = \dfrac{\gamma}{n+1}$ y $\mu_n = \mu, n = 0, 1, 2, \cdots$. $\lambda_n$ incluye ahora una función decreciente que modeliza la impaciencia del cliente ante una cola larga.
- El sistema es estable siempre a pesar de ser infinito.
- La tasa global de llegadas es $\lambda = \sum_{n=0}^{N} \frac{\gamma}{n+1} p_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{\gamma}{n+1} \frac{\phi^n}{n!} e^{-\phi} = \mu(1 - e^{-\phi})$.

| PROCESO | DISTRIBUCIÓN DE LA VARIABLE | PARÁMETROS DE RENDIMIENTO |
|---|---|---|
| $N$ = número de clientes en el sistema (v.a.).<br>$N \hookrightarrow P(\phi)$ | $p_n = \dfrac{\phi^n}{n!} e^{-\phi}, \quad n = 0, 1, \cdots$. | $L = E(N) = \phi$. |
| $N_q$ = número de clientes en la cola. | $P(N_q = k) = \begin{cases} p_0 + p_1, & k = 0 \\ p_k, & k > 0 \end{cases}$<br>$P(N_q = k) = P(N = s + k) = p_{k+s}$, | $L_q = E(N_q) = \lambda W_q = \phi - (1 - e^{-\phi})$. |
| $T_q$ = tiempo en la cola. | No se ve la distribución. | $W_q = E(T_q) = \dfrac{\phi}{\mu(1 - e^{-\phi})} - \dfrac{1}{\mu}$. |
| $T$ = tiempo en el sistema. | No se ve la distribución. | $W = E(T) = \dfrac{L}{\lambda} = \dfrac{\phi}{\mu(1 - e^{-\phi})}$. |