REDES DE COLAS

- Son sistemas formados por más de una cola.
- La salida de una cola sirve de entrada para otra cola.
- Los clientes visitan las colas según sus necesidades.
- Las colas del sistema son, en general, de distinto tipo.
- En general, los modelos de estas colas son complejos a causa de las fuertes dependencias entre los sucesos.

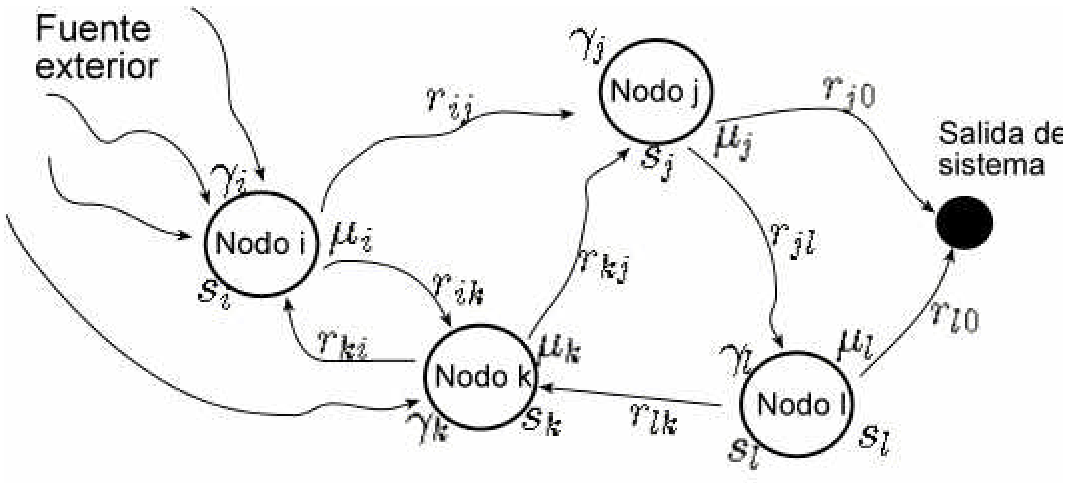

Figura 1: Redes de colas.

Parámetros una red de colas:

- La fuente exterior se llama a los clientes que no vienen de otra cola de la red.

- Las colas se llaman nodos. Cada nodo tiene s_i servidores.

- Los clientes llegan al nodo i con tasa γ_i.

- El nodo negro representa la salida del sistema de colas.

- El nodo i da servicio según una tasa μ_i.

- La probabilidad de ir del nodo i al nodo j está dada por r_{ij}.

- La probabilidad r_{i0} es la de salir del sistema desde el nodo i.

REDES DE JACKSON:

1. Las llegadas al nodo i sigue una distribución de Poisson de media γ_i.

2. El tiempo de servicio es independiente en cada nodo y se distribuye según una exponencial de parámetro μ_i.

3. La probabilidad r_{ij} es independiente del estado del nodo.

Redes abiertas y cerradas:

- Si $r_{i0} \neq 0$ y $\gamma_i \neq 0$, la red se dice que es abierta.

- Si $r_{i0} = 0$ y $\gamma_i = 0$, la red se dice que es cerrada.

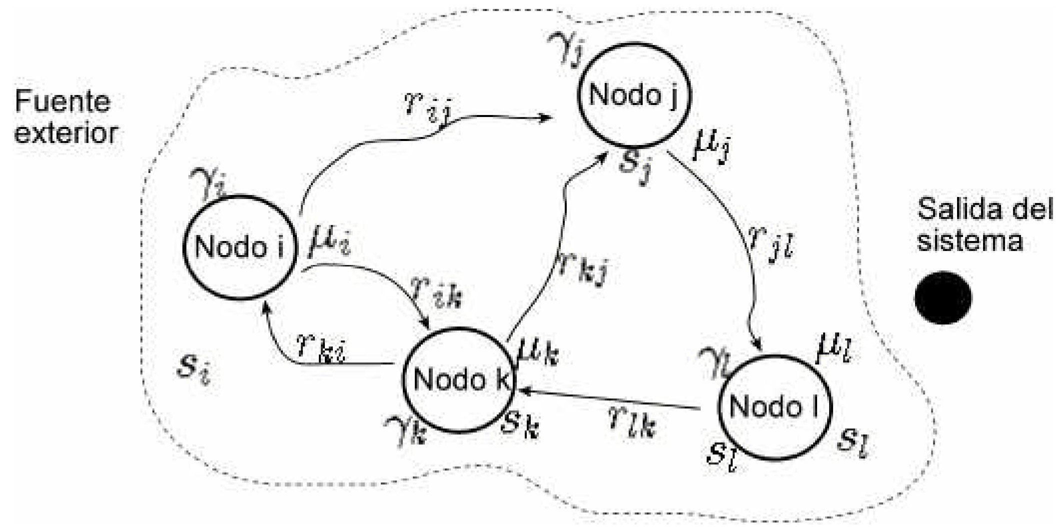

Figura 2: Redes de colas cerrada.

Redes en serie:

- Son las que cumplen las dos condiciones siguientes:

1. $\gamma_i = \begin{cases} \lambda, & i = 1 \\ 0, & i \geq 2 \end{cases}$

2. Si n es el número total de nodos:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i + 1, \quad 1 \cdot \;\; i \cdot \;\; n - 1 \\ 1, & i = n, \quad j = 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

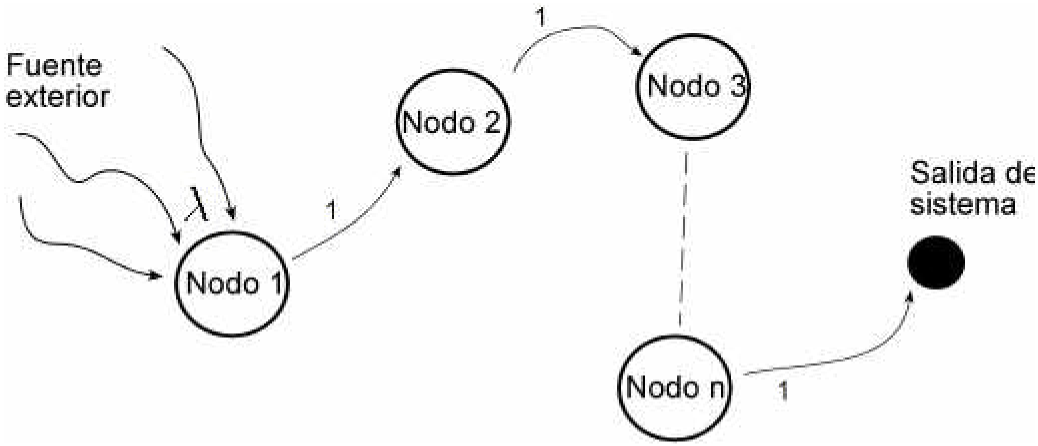

Figura 3: Redes de colas en serie.

OBJETIVO:

- Estudiar el sistema en equilibrio, esto es, cuando $t \to \infty$.

- Cada cola tendrá que alcanzar el estado de equilibrio.

- Se estudia el rendimiento de la red de colas a través de los parámetros habituales:

$$
\begin{aligned}
L &= L_1 + L_2 + \cdots\cdots + L_n \\
W &= W_1 + W_2 + \cdots\cdots + W_n \\
L_q &= L_{q_1} + L_{q_2} + \cdots\cdots + L_{q_n} \\
W_q &= W_{q_1} + W_{q_2} + \cdots\cdots + W_{q_n}
\end{aligned}
$$

CUESTIÓN:

- Supongamos que el primer nodo de una cola es una $M/M/1$ con llegada según Poisson de tasa λ.
- Los clientes que salen de ésta van a otra cola también con tiempo de servicio exponencial y un sólo servidor:

> ¿Es la segunda cola una $M/M/1$ con llegadas de Poisson?

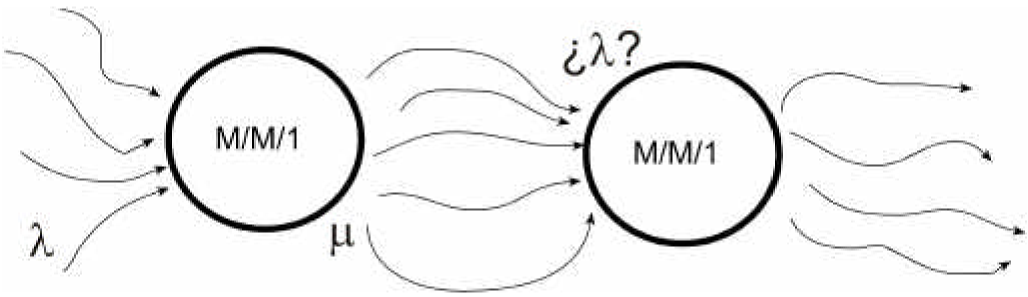

Figura 4: Teorema de Burke.

Teorema de Burke (56): La segunda cola es una $M/M/1$ con llegadas de Poisson de parámetro λ.

Este resultado se puede generalizar para un sistema de colas con n nodos:

- Sea N_i la variable aleatoria número de clientes en la cola i en el estado de equilibrio. La probabilidad de que N_i tome el valor k_i es:

$$P(N_i = k_i) = p_i(k_i).$$

- La probabilidad conjunta es:

$$P(N_1 = k_1, \cdots\cdots, N_n = k_n) \equiv P(k_1, \cdots, k_n).$$

- El teorema de Burke afirma que:

$$P(N_1 = k_1, \cdots\cdots, N_n = k_n) = P(k_1, \cdots, k_n) =$$
$$= p_1(k_1) \cdot \cdots \cdot p_n(k_n).$$

- Este resultado es cierto para colas del tipo $M/M/S_i/\infty$.

- El resultado deja de ser cierto para colas con capacidad finita, ya que se producen fenómenos de bloqueo.

- Hay una excepción: si todas las colas son de capacidad infinita menos la que sale al sistema, el resultado es todavía cierto.

Ejemplo de red de colas:

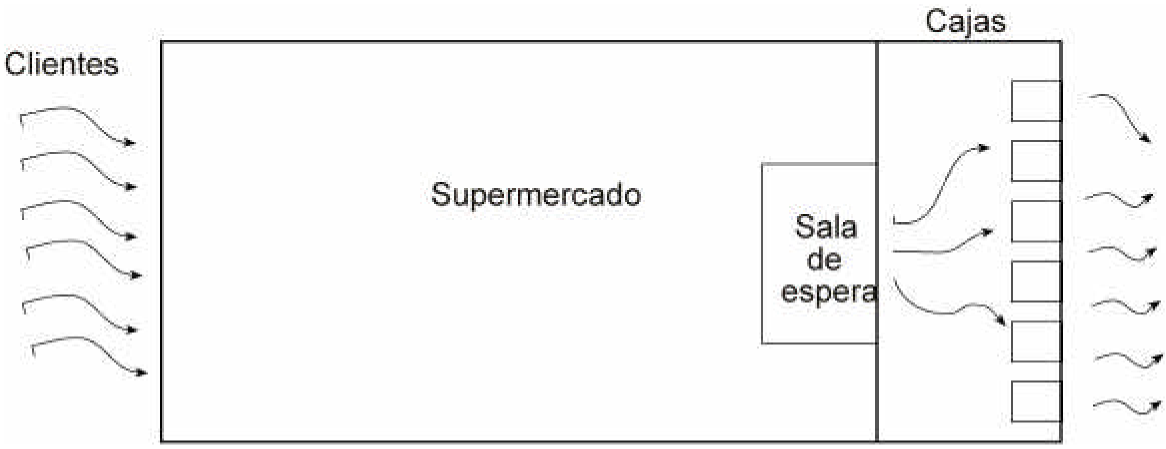

Figura 5: Una red de colas.

- Se estudia el supermercado en horas punta.

- Llegadas $\hookrightarrow P(\lambda), \lambda = 40$ c/h.

- Llenar el carro de la compra $\hookrightarrow$ *exp* de media 45 minutos.

- En la zona de cajas se atiende exponencialmente a razón de 4 c/minuto de media.

Queremos saber:

1. ¿Cuál es el mínimo número de cajas para atender sin que se desborden en las horas punta?

2. Si se decide poner una caja más que el número mínimo, ¿cuál es la espera media en la sala de espera?

3. ¿Cuánta gente hay en la gran superficie de media?

4. ¿Cuánto se tarda de media en hacer la compra entera?

Se modeliza con 2 colas en serie. ¿Cuáles?

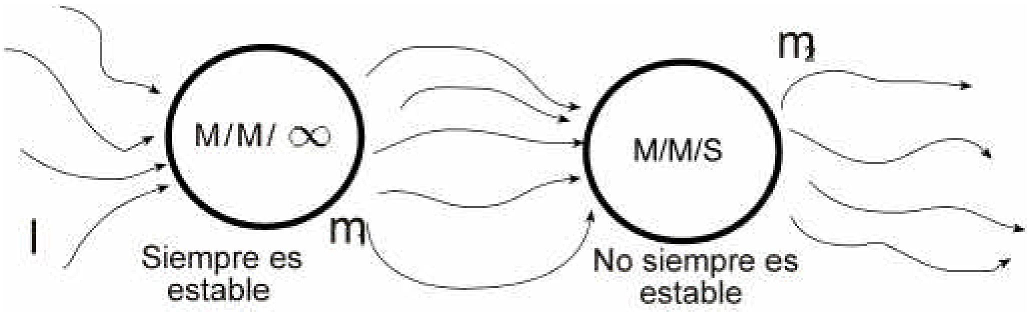

Figura 6: Una red de colas.

- Por el resultado de Burke, la segunda cola es una $M/M/S$ con:
    1. entradas según Poisson $P(\lambda), \lambda = 40$ c/h.
    2. salidas según una exponencial de parámetro $4/60$ c/h.

- El número mínimo de chas s_m es:

$$\frac{\lambda}{s_m\mu} < 1 \Longrightarrow s_m > 40\frac{4}{60} = 2'67 \Longrightarrow s_m = 3.$$

- Si se ponen $s = s_m + 1$ cajas, entonces tenemos una red de colas:

$$M/M/\infty \longrightarrow M/M/4/\infty.$$

- $N_{q_1} \equiv 0, T_{q_1} \equiv 0.$

- $N_1 =$ tiempo en el sistema $P\left(\frac{\lambda}{\mu}\right).$

- $L_1 = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{4/3} = 30\text{c}.$

- $W_1 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{4/3} = 45\text{m}.$

- $\phi = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{40}{15} = \dfrac{8}{3}$; $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu} = \dfrac{40}{4 \cdot 15} = 0'15.$

- $p_0 = p_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \dfrac{\phi^n}{n!} + \dfrac{\phi^s}{s!(1-\rho)}\right]^{-1}.$

- $W_{q_2} = \dfrac{\phi^4}{4 \cdot 4!(1-\rho)^2} p_0 = 0'019 = 1'14\text{m}.$

- $L_{q_2} = \lambda W_{q_2} = 40 \cdot (0'019) = 0'76\text{m}.$

- $W_2 = W_{q_2} + \dfrac{1}{\mu} = 0'0856 = 5'136\text{m}.$

- $L_2 = \lambda W_{q_2} = 3'44\text{m}.$

- $L = L_1 + L_2 = 30 + 3'44 = 33'44$c.

- $W = W_1 + W_2 = 0'75 + 0'0856 = 0'8356 = 50'136$m.